

工業数理基礎

(全問必答)

第1問 [解答記号 ア ~ シ] (配点 34)

以下の空欄のうち、ア ~ オ , コ , シ には、それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし、それ以外には、当てはまる数字をマークせよ。なお、円周率は π で表す。

問 1 ガスや液体を保存する円筒形容器の形状について考えてみよう。容器の製造において材料コストを最小限に抑えるために、ある決まった表面積に対して、体積が最大になるような形状を決定したい。

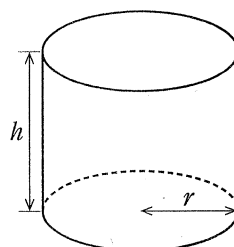


図 1

ここで、図 1 のような円筒形容器について、上面、底面および側面の面積を合計した表面積が定数 $S[\text{m}^2]$ で与えられている場合、体積 $V[\text{m}^3]$ が最大になるのは、容器の底面の半径 $r[\text{m}]$ と、容器の高さ $h[\text{m}]$ がどのような関係にあるときかを考えてみよう。容器の表面積 S は、上面および底面の面積の合計 $2\pi r^2$ と、側面の面積 ア の和であるので、底面の半径 r と容器の高さ h を用いて、

$$S = 2\pi r^2 + \text{ア} \quad (1)$$

と表される。また、容器の体積 V は、底面の面積と高さ h の積であり、

$$V = \text{イ} \quad (2)$$

となる。式(1)と式(2)から h を消去すると、

$$V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \quad (3)$$

となる。表面積 S は一定であるので、 V は r

の関数であり、 $0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ のとき、

図 2 のように変化する。

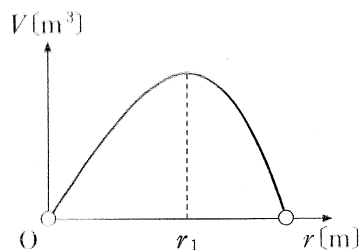


図 2

ここで、 V が最大となるときの r の値 r_1 [m]は、 $\frac{dV}{dr} = 0$ を解くことによって求めることができる。式(3)を r で微分すると、

$$\frac{dV}{dr} = \boxed{\text{ウ}} \quad (4)$$

となる。式(4)から、 $\frac{dV}{dr} = 0$ を解くと、 r の範囲に注意して、

$$r_1 = \boxed{\text{エ}} \quad (5)$$

となる。また、式(5)から、 S を r_1 で表し、式(1)に代入することによって $h = 2r_1$ となる。したがって、円筒形容器の表面積が与えられたときに容器の体積が最大になるのは、容器の直径と高さが等しい場合である。

$\boxed{\text{ア}} \cdot \boxed{\text{イ}}$ の解答群

- | | | | |
|-----------------------|---------------|-------------------------|-------------------------|
| ① $\frac{\pi r h}{2}$ | ② $\pi r h$ | ③ $2 \pi r h$ | ④ $3 \pi r h$ |
| ⑤ $2 \pi r^2 h$ | ⑥ $\pi r^2 h$ | ⑦ $\frac{\pi r^2 h}{2}$ | ⑧ $\frac{\pi r^2 h}{4}$ |

$\boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}}$ の解答群

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| ① $S - 3 \pi r^2$ | ② $\frac{S}{2} - 3 \pi r^2$ | ③ $\frac{S}{2} - 3 \pi r^3$ |
| ④ $\frac{S}{2} - 2 \pi r^2$ | ⑤ $\sqrt{\frac{S}{4 \pi}}$ | ⑥ $\sqrt{\frac{S}{6 \pi}}$ |
| ⑦ $\sqrt{\frac{S}{3 \pi}}$ | ⑧ $\sqrt{\frac{2 S}{3 \pi}}$ | |

工業数理基礎

問 2 音の強さ(大きさ)と、人が聴いたときに感じる音の大きさ(以下、感覚量と表す)の関係について考えてみよう。

音の強さ I と人の感覚量 L は、図 3 のような対数の関係があるといわれている。ここで、音の強さ I は、音が進む方向に垂直な単位面積を単位時間当たりには通過する音のエネルギー

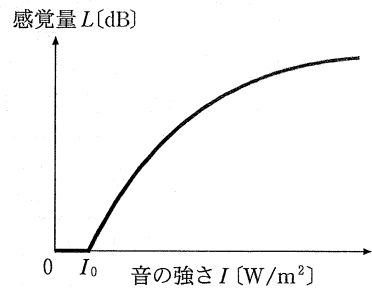


図 3

のことで、単位を $[W/m^2]$ として表し、感覚量 L は単位を $[dB]$ (デシベル) とする量で表す。また、 I_0 は最小可聴値といい、音に対して人の感覚が生じる最小の音の強さである。以下の計算が必要であれば、近似値として $\log_{10} 2 = 0.30$, $\log_{10} 3 = 0.48$ を用いてよい。

$I \geq I_0$ のとき、 I と L の関係は、式(6)で表すことができる。

$$L = 10 \log_{10} I + C \quad (C: \text{定数}) \quad (6)$$

ここで、図 3 から、 $I = I_0$ のとき $L = 0$ なので、式(6)より、定数 $C = -10 \log_{10} I_0$ が定まり、式(7)が得られる。

$$L = 10 \log_{10} I - 10 \log_{10} I_0 = 10 \log_{10} \boxed{\text{オ}} \quad (7)$$

オ の解答群

- ① $(I - I_0)$ ② $\frac{I}{I_0}$ ③ $\frac{I_0}{I}$ ④ $I_0 I$

式(7)を用いて、日常生活で体験する音の強さと人の感覚との関係を調べてみよう。表 1 に、身近な場所における、一般的な音の強さと感覚量を示す。ガード下における、音の強さに対する感覚量を計算してみよう。表 1 に示すオフィスにおける音の強さと感覚量を式(7)に代入し、最小可聴値 I_0 を求めると、 $10^{-\boxed{\text{カキ}}}$ W/m^2 となる。 I_0 と音の強さから、ガード下における感覚量は $\boxed{\text{クケ}}$ dB と計算できる。

表 1

場 所	音の強さ I [W/m^2]	感覚量 L [dB]
静かな住宅地	10^{-9}	30
オフィス	10^{-8}	40
ガード下	10^{-3}	クケ

このように、ガード下における音の強さは、オフィスにおける音の強さと比べて 10^5 倍にもなるが、感覚量では約 コ 倍となる。

コ の解答群

- ① 0.4 ② 1.8 ③ 2.0 ④ 2.3 ⑤ 3.0

次に、音の強さが増したときの、人の感覚量の変化について考えてみよう。オフィスの場合、表 1 に示す音の強さが 2 倍になると $2 \times 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2$ となる。これを式(7)に代入して L を求めると、 L はもとの感覚量 (40 dB) より約 サ dB 増加することになる。また、ガード下においても、音の強さが 2 倍になった場合の感覚量を同様に求めると、ガード下での感覚量の増加量は、オフィスの場合と比べて、シ。

シ の解答群

- ① $\frac{1}{4}$ となる ② $\frac{1}{2}$ となる ③ 等しくなる
④ 2 倍となる ⑤ 4 倍となる

ここでは、音という刺激を例にあげたが、このような物理的な刺激の大きさと人の感覚量の対数の関係は、明るさ、におい等、様々な刺激においても同様にみられる。

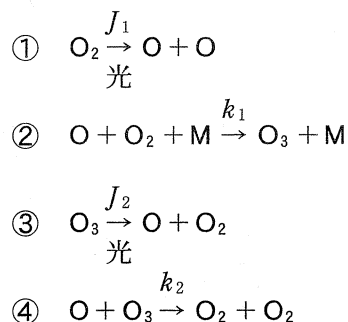
工業数理基礎

第2問 [解答記号 ア ～ コ] (配点 33)

以下の空欄のうち、ア ～ ウ，キ，ケには、それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし、それ以外には、当てはまる符号、または数字をマークせよ。

地球の成層圏(地表からの高さ 10～50 km の範囲)のオゾン層は、太陽光中の有害な紫外線を吸収することで、地表に住む人間をはじめとする生物を守っている。ここでは、オゾン層の形成と破壊のメカニズム、そしてオゾン層保護の重要性について考えてみよう。

問 1 最初に、オゾン層のオゾンの濃度がどの程度かを考えてみよう。オゾン層の形成過程は、①～④に示すように、O(酸素原子)，O₂(酸素分子)，O₃(オゾン分子)，およびM(自身は化学変化しないが、化学反応全体を促進する働きをする分子)の化学反応で構成されている。[A]はAの濃度を表し、 k_1 ， k_2 ，



J_1 ， J_2 を定数とする。①～④の各反応の速度は定数と反応物濃度の積で計算できる。O₃に着目すると、O₃は②の反応により $k_1[\text{O}][\text{O}_2][\text{M}]$ の速度で生成し、③および④の反応により $(J_2[\text{O}_3] + k_2[\text{O}][\text{O}_3])$ の速度で消失する。ここで、時間に対してO₃濃度が変化しないと仮定すると、生成速度と消失速度は等しいから、式(1)が成り立つ。

$$k_1[\text{O}][\text{O}_2][\text{M}] = J_2[\text{O}_3] + k_2[\text{O}][\text{O}_3] \quad (1)$$

また、Oの生成、消失速度をO₃と同様に考え、O濃度は変化しないと仮定すると、式(2)が得られる。

$$2J_1[\text{O}_2] + J_2[\text{O}_3] = k_1[\text{O}][\text{O}_2][\text{M}] + k_2[\text{O}][\text{O}_3] \quad (2)$$

式(1)と式(2)の各辺の差をとり整理すると、式(3)となる。

$$\boxed{\text{ア}} = J_1[\text{O}_2] + J_2[\text{O}_3] \quad (3)$$

ここで、 $J_1[\text{O}_2]$ は $J_2[\text{O}_3]$ に比べて非常に小さいことがわかっているので、 $J_1[\text{O}_2]$ を無視すると、 $[\text{O}]$ に関する式(4)が得られる。

$$[\text{O}] = \boxed{\text{イ}} \quad (4)$$

一方、式(1)と式(2)の各辺の和をとることにより、式(5)が導かれる。

$$J_1[\text{O}_2] = k_2[\text{O}][\text{O}_3] \quad (5)$$

最後に、式(4)を式(5)に代入すると、式(6)が得られる。

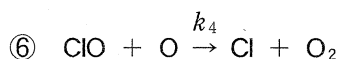
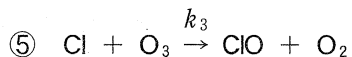
$$\frac{[\text{O}_3]}{[\text{O}_2]} = \boxed{\text{ウ}} \quad (6)$$

式(6)の右辺の各値と高度の関係はわかっている。例えば、高度 30 km では、 $\frac{[\text{O}_3]}{[\text{O}_2]} = 10^{-4}$ となり、オゾン層のオゾン濃度は酸素濃度に比べてごくわずかなであることがわかる。

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$ の解答群

- | | | |
|--|---|---|
| ① $k_1[\text{O}][\text{O}_2][\text{M}]$ | ④ $2k_1[\text{O}][\text{O}_2][\text{M}]$ | ⑦ $J_2[\text{O}_3]$ |
| ② $k_2[\text{O}][\text{O}_3]$ | ⑤ $\frac{J_2[\text{O}_3]}{k_1[\text{O}_2][\text{M}]}$ | ⑧ $\frac{k_1[\text{O}_2][\text{M}]}{J_2[\text{O}_3]}$ |
| ③ $\frac{k_1J_1}{k_2J_2}[\text{M}]$ | ⑥ $\frac{k_2J_2}{k_1J_1}[\text{M}]$ | ⑨ $\sqrt{\frac{k_1J_1}{k_2J_2}}[\text{M}]$ |
| ④ $\sqrt{\frac{k_2J_2}{k_1J_1}}[\text{M}]$ | | |

問 2 次に、オゾン層中のオゾンの破壊メカニズムについて考えてみる。我々が大気に放出したフロンがオゾン層を破壊している。すなわち、放出されたフロンから塩素原子(Cl)が分離し、次の二つの反応によってオゾンは破壊される。



⑤と⑥の反応式を見ると、Cl原子が再生されており、もともと放出されたCl原子の個数以上の多くのオゾンが破壊される。

工業数理基礎

⑤と⑥の反応式で表されるオゾン破壊反応について、具体的に考えてみよう。 k_3, k_4 を定数とすると、⑤、⑥それぞれの反応の速度は、 $k_3[\text{Cl}][\text{O}_3]$ 、 $k_4[\text{ClO}][\text{O}]$ となる。いま、 k_3, k_4 の値がそれぞれ、 $1 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/(\text{個} \cdot \text{s})$ 、 $4 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/(\text{個} \cdot \text{s})$ であり、 $[\text{O}_3]$ の最初の値は $3 \times 10^{12} \text{ 個/cm}^3$ とする。また、 $[\text{O}]$ は $2 \times 10^7 \text{ 個/cm}^3$ で常に一定とする。例えば、 $[\text{Cl}]$ 、 $[\text{ClO}]$ が最初にそれぞれ $1 \times 10^2 \text{ 個/cm}^3$ あるとすると、⑤、⑥の反応が開始したときの速度はそれぞれ、

⑤の反応の速度 $k_3[\text{Cl}][\text{O}_3] = 3 \times 10^3 \text{ 個}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})$ (反応開始時)

⑥の反応の速度 $k_4[\text{ClO}][\text{O}] = \boxed{\text{エ}} \times 10^{\boxed{\text{オカ}}} \text{ 個}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})$ (反応開始時)

となる。この計算結果を見ると、⑥の反応開始時の速度は⑤と比べて、
 $\boxed{\text{キ}}$ ことがわかり、反応開始直後に(十分短い時間で)、 $[\text{Cl}]$ は
 0 個/cm^3 、 $[\text{ClO}]$ は $2 \times 10^2 \text{ 個/cm}^3$ となる。よって、⑥の反応の速度はただ
 ちに2倍となるため、この値を用いてオゾンが 10^3 個/cm^3 消失(反応)するま
 でにかかる時間を計算すると、約 $6 \times 10^{\boxed{\text{ク}}}$ 秒となる。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

- | | | |
|----------|-----------------------|----------|
| ① 非常に大きい | ① 変わらない | ② 非常に小さい |
| ③ 約2倍である | ④ 約 $\frac{1}{2}$ である | |

問3 オゾン層にあるオゾン分子は、不均一で、希薄な状態で存在している。これを均一な標準状態(0°C , 1013 hPa)の気体層に圧縮すると、その厚み l は、わずか数mmという非常に小さな値となる(図1)。

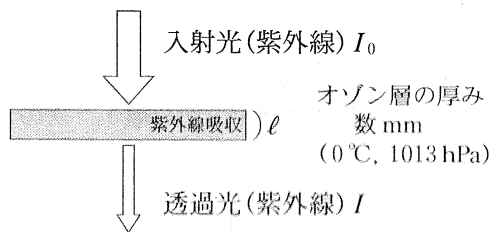


図1

オゾン層のオゾンは、太陽光の紫外線を吸収している。このオゾンが破壊されると、地表に到達する紫外線量が増大し、皮膚がんやほかの疾病の危険性が

高くなるといった問題を引き起こす。次に、オゾン層による紫外線の吸収について考えてみよう。光の吸収に関して、次の式(7)が成り立つ(図1)。

$$U = \frac{I}{I_0} = 10^{-\varepsilon \ell} \quad (7)$$

ここで U は光(紫外線)の透過率, I_0 は入射光強度, I は透過光強度, ε は定数, ℓ はオゾン層の厚みを表す。

ここで U の ℓ による微分 $\frac{dU}{d\ell}$ を $\log_e 10 = 2.3$ として求めると、式(8)となる。

$$\frac{dU}{d\ell} = -2.3\varepsilon \times 10^{-\varepsilon \ell} \quad (8)$$

式(8)にもとづいて、 U の変化量 ΔU と ℓ の変化量 $\Delta \ell$ の関係を、式(9)のように書き表してみる。

$$\Delta U = -2.3\varepsilon \times 10^{-\varepsilon \ell} \Delta \ell \quad (9)$$

さらに、式(7)と式(9)から、 $\frac{\Delta U}{U}$ と $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ との関係は、式(10)のように書くことができる。

$$\frac{\Delta U}{U} = - \boxed{\text{ケ}} \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (10)$$

式(10)は、光(紫外線)透過量の増加の割合は、 ℓ の減少の割合に $\boxed{\text{ケ}}$ を乗じたものであることを表している。 ℓ の値を $3\text{ mm} = 3 \times 10^{-3}\text{ m}$ とし、紫外線に対してオゾン層の ε が 1300 m^{-1} の場合を考える。仮にオゾン層の厚み(ℓ)の減少の割合を 1% とすると、紫外線の透過量の増加の割合は約 $\boxed{\text{コ}}$ % となる。わずかなオゾンの減少でも紫外線透過量はかなり増大することがわかる。オゾン層を保護することの重要性が理解できる。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① $\frac{\ell}{\varepsilon}$

② $\frac{\varepsilon}{\ell}$

③ $\frac{2.3\varepsilon}{\ell}$

④ $\varepsilon \ell$

⑤ $2.3\varepsilon \ell$

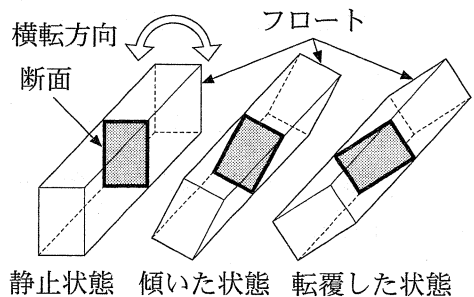
第3問 [解答記号 ア ~ ク] (配点 33)

以下の空欄のうち、ア ~ カ、ク には、それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし、それ以外には、当てはまる数字をマークせよ。

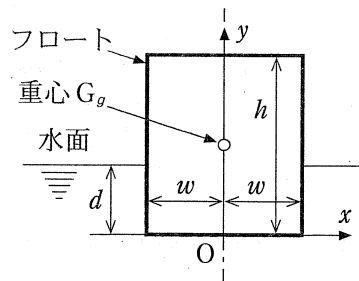
船舶や洋上観測ブイなどの浮体構造物は、波や風などを受けても簡単には転覆しないように設計されている。ここでは、密度 ρ [kg/m³] の一様な材料で作られた直方体形状フロート(浮き)の横転に対する安定性について考えてみよう(図1(a))。安定性の評価に当たっては、浮力と重力の作用による、図1(a)に示された断面に垂直な軸の回りの回転運動のみを考える。また、フロートの断面形状は、幅 $2w$ [m]、高さ h [m] で一様であるから、以下ではフロートの奥行きを 1 m と仮定して考える。

ここで、フロート断面上の各点の位置を表すために、図1(b)のようにフロート

断面上に原点 O をとり、 x 軸と y 軸を定める。なお、重力加速度を g [m/s²] とする。



(a) 直方体形状フロート



(b) 断面図

図1

問1 まず、フロートが傾いていない場合について考えよう。フロートに作用する重力の大きさ F_g [N] は $F_g = 2wh\rho g$ と表される。また、水の密度を ρ_0 [kg/m³] ($\rho_0 > \rho$)、フロートの沈下量を d [m] (図1(b)) とすると、フロートに作用する浮力の大きさ F_f [N] は、 $F_f =$ ア と表される。そして、フロートにかかる浮力と重力の大きさは等しいから、 $F_f = F_g$ が成り立つ。この関係をもとに、 d を h で表すと $d =$ イ となる。

ア・イの解答群

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------|-----------------------------------|
| ① $2wd(\rho_0 - \rho)g$ | ④ $2wd\rho_0g$ | ⑦ $2wd\rho g$ |
| ② $2wd\frac{\rho}{\rho_0}g$ | ⑤ $(\rho_0 - \rho)h$ | ⑧ $\frac{\rho}{\rho_0}h$ |
| ③ $\frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}h$ | ⑥ ρ_0h | ⑨ $\frac{\rho}{(\rho_0 - \rho)}h$ |

問 2 次に、フロートがある角度 θ [rad] 傾いた結果、図 2 のように水面下のフロート断面が台形 ABDE となる場合について考えよう。この状態での浮力の作用点は、図 3 に示す台形 ABDE の図心に対応する。そこで、図心の座標を求めることにより、図 2 の状態での浮力の作用点を求めよう。

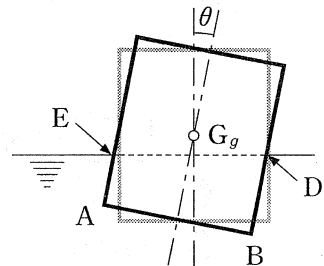


図 2

台形 ABDE の図心 $G_f(x_f, y_f)$ は、三角形 CDE の図心 G_T 、長方形 ABCE の図心 G_R 、各図形の面積から求めることができる。

まず、三角形 CDE と長方形 ABCE の面積を求めよう。三角形 CDE の三角比に注目すると、線分 EC の長さが $2w$ であるので、線分 CD の長さは θ を用いて **ウ** と表される。また、台形 ABDE の面積は、問 1 の状態で水が排除された領域の断面積 $2wd$ と等しい。この関係と線分 CD の長さから、線分 EA の長さは **エ** と求まる。すなわち、三角形 CDE と長方形 ABCE の面積は、それぞれ $\frac{1}{2} \times 2w \times \text{ウ}$ 、 $2w \times \left(\text{エ} \right)$ と表される。

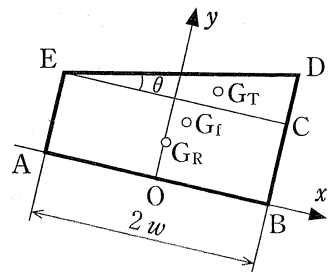


図 3

また、三角形 CDE の図心 G_T および長方形 ABCE の図心 G_R の座標は、それぞれ $\left(\frac{1}{3}w, d - \frac{1}{3}w \tan \theta \right)$ 、 $\left(0, \frac{1}{2} \left(\text{エ} \right) \right)$ と表される。

ウ・エの解答群

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------|
| ① $d - w \sin \theta$ | ④ $d - w \tan \theta$ | ⑦ $d + w \sin \theta$ | ⑨ $d + w \tan \theta$ |
| ② $2w \tan \theta$ | ⑤ $2w \cos \theta$ | ⑧ $d \sin \theta$ | ⑩ $\frac{w}{d} \sin \theta$ |

工業数理基礎

一方、 y 軸回りのモーメントの釣り合いから、以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & (\text{台形 ABDE の面積}) \times (G_f \text{ から } y \text{ 軸までの距離}) \\ &= (\text{三角形 CDE の面積}) \times (G_T \text{ から } y \text{ 軸までの距離}) \\ &+ (\text{長方形 ABCE の面積}) \times (G_R \text{ から } y \text{ 軸までの距離}) \end{aligned}$$

この関係式の左辺は **オ** と表される。また、右辺もすでに求めた面積と図心を用いて表すことができる。 x 軸についても同様の関係式を導いて整理すると、台形の図心 $G_f(x_f, y_f)$ の座標は、 $\left(\frac{w^2}{3d} \tan \theta, \frac{1}{2}d + \frac{w^2}{6d} \tan^2 \theta\right)$ と求まる。

オ の解答群		
① $2wd\sqrt{x_f^2 + y_f^2}$	② $2wd x_f$	③ $2wd y_f$
④ $4wd\sqrt{x_f^2 + y_f^2}$	⑤ $4wd x_f$	⑥ $4wd y_f$

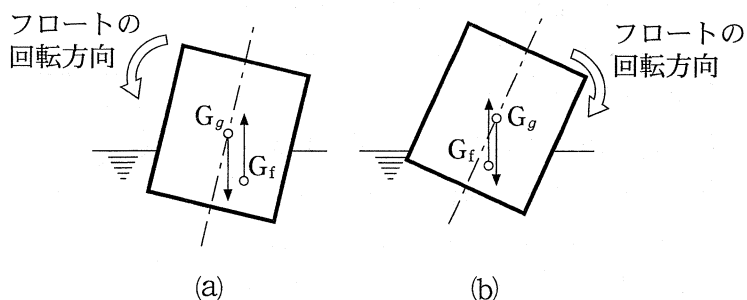


図 4

フロートの傾きや沈下量に応じて変化する浮力の作用点 G_f が、フロートの重心 G_g と図 4(a) のような関係にあるときには、フロートの傾きを減少させる方向に力が作用するので、フロートは安定となる。一方、図 4(b) のような関係にあるときには、傾きを増大する方向に力が作用するので、フロートは不安定となる。

問 3 最後に、フロートが安定になる条件を数式で表すことを考えてみよう。図 4(a) の状態と図 4(b) の状態が切り替わる限界の状態では、重力の作用する G_g と浮力の作用する G_f の位置が、回転を打ち消し合う配置となる。この状態を図

示すると、 $G_f(x_f, y_f)$ と $G_g(0, \frac{h}{2})$ は図5のような関係になる。このときの G_f と G_g の関係は、 $\frac{h}{2} - y_f$ と x_f の比を θ の三角比で表して整理することにより、次の式(1)のように表される。

$$\boxed{\text{力}} \quad x_f + y_f = \frac{h}{2} \quad (1)$$

式(1)の左辺が右辺より大きいとき、図4(a)の状態となり、左辺が右辺より小さければ、図4(b)の状態となる。すなわち、フロートが安定になる条件は、

$$\boxed{\text{力}} \quad x_f + y_f > \frac{h}{2} \quad (2)$$

となる。

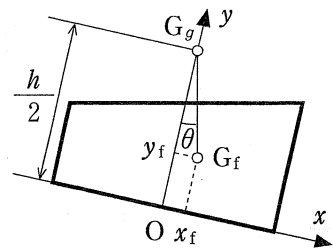


図5

$\boxed{\text{力}}$ の解答群

- ① $\cos \theta$ ② $\cos^2 \theta$ ③ $\frac{1}{\tan \theta}$ ④ $\frac{1}{\cos \theta}$ ⑤ $\tan \theta$

式(2)の条件を用いて、与えられたフロート断面形状やフロート密度での安定性の評価について考えよう。問2で考えた θ の範囲(水面下のフロート断面が台形ABDEとなる範囲)では、フロートの安定条件は式(2)に G_f の座標を代入して、以下のように整理できる。

$$3d^2 - 3hd + 2w^2 + w^2 \tan^2 \theta > 0 \quad (3)$$

この条件の使用例として、 $h = 4 \text{ m}$ 、 $w = \sqrt{5} \text{ m}$ 、 $\rho = \frac{1}{4} \rho_0$ の場合について考えてみよう。問1で求めた関係から、静止状態での沈下量 d の値は $\boxed{\text{キ}}$ mと計算される。これらの値を式(3)に代入して不等式が成立するかどうかを評価すると、このフロートは $\boxed{\text{ク}}$ ことがわかる。

このように、フロートに作用する力を分析することにより、フロートの安定性を定量的に評価することが可能となる。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

- ① 安定になる ② 不安定になる
③ $\theta = 0$ のときのみ安定になる ④ $\theta = 0$ のときのみ不安定になる