数　　学　　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　25）

〔1〕 $A = \dfrac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$,　　$B = \dfrac{1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ とする。

このとき

$$AB = \frac{1}{(1 + \sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{6} - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり，また

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$$

である。以上により

$$A + B = \frac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

〔2〕 a を定数とし，二つの不等式

$$|2x + 13| \geqq 3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$x^2 - 2ax + 2a^2 + 10a + 15 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。

下の $\boxed{\text{タ}}$ には，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

不等式 ① の解は

$$x \leqq \boxed{\text{クケ}},\quad \boxed{\text{コサ}} \leqq x$$

であり，これと次の 2 次不等式

$$x^2 + \boxed{\text{シス}}\,x + \boxed{\text{セソ}} \ \boxed{\text{タ}}\ 0$$

の解は一致する。

次に，不等式 ② を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{チツ}} - \sqrt{\boxed{\text{テト}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{チツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テト}}}$$

であり，この範囲にある最小の整数は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。

$a = \boxed{\text{ナニ}}$ のとき，二つの不等式 ① と ② をともに満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ヌネ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ノハ}}$$

である。

数学Ⅰ

第２問 （配点　25）

座標平面上にある点Pは，点A$(-8, 8)$から出発して，直線$y=-x$上をx座標が１秒あたり２増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点Qは，点PがAを出発すると同時に原点Oから出発して，直線$y=10x$上をx座標が１秒あたり１増加するように一定の速さで動く。出発してからt秒後の２点P，Qを考える。点PがOに到達するのは$t=\boxed{\text{ア}}$のときである。以下，$0<t<\boxed{\text{ア}}$で考える。

(1)　点Pとx座標が等しいx軸上の点をP′，点Qとx座標が等しいx軸上の点をQ′とおく。△OPP′と△OQQ′の面積の和Sをtで表せば

$$S=\boxed{\text{イ}}t^2-\boxed{\text{ウエ}}t+\boxed{\text{オカ}}$$

となる。これより$0<t<\boxed{\text{ア}}$においては，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$で$S$は最小値$\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$をとる。

（数学Ⅰ第２問は次ページに続く。）

次に，a を $0 < a <$ $\boxed{\text{ア}}$ $- 1$ を満たす定数とする。以下，$a \leqq t \leqq a + 1$ における S の最小・最大について考える。

(i) S が $t = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小となるような a の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(ii) S が $t = a$ で最大となるような a の値の範囲は $0 < a \leqq \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) 3 点 O，P，Q を通る 2 次関数のグラフが関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは，$t = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときであり，x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ だけ平行移動すればよい。

第 3 問 (配点 30)

△ABC において AB = 6，BC = $2\sqrt{7}$，CA = 4 とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，∠A の二等分線と△ABC の外接円との点 A と異なる交点を E とする。辺 AC の延長と，2 点 B，E を通る直線の交点を P とする。

(1) $\cos\angle ABC = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，$\cos\angle BAC = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であるから，$\angle BAC = \boxed{\text{カキ}}^\circ$ である。

(2) 点 E から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を H とすると，

$\angle ECH = \boxed{\text{クケ}}^\circ$，$\angle EBH = \boxed{\text{コサ}}^\circ$ であるから，$HC = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。したがって，$CE = \dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

(3) △ABP において

$$\angle \mathrm{APB} = 180^\circ - \angle \mathrm{BAP} - (\angle \mathrm{CBP} + \angle \mathrm{ABC}) = \boxed{\text{チツ}}^\circ - \angle \mathrm{ABC}$$

である。したがって，$\sin\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(4) △ECP において，$\sin\angle \mathrm{CEP} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるから，$\mathrm{CP} = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第4問 （配点　20）

a，b は $a > 0$，$b \leqq 0$ である定数とし，t の 2 次方程式

$$t^2 + 4at + b = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。方程式 ① を $\left(t + \boxed{\text{ア}}\,a\right)^2 = \boxed{\text{イ}}\,a^2 - b$ と書き直す。

$b \leqq 0$ であるから，方程式 ① の実数解は

$$t = \boxed{\text{ウエ}}\,a \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}\,a^2 - b}$$

である。

（数学 I 第 4 問は次ページに続く。）

方程式①と同じ a, b に対して，x の方程式

$$(x-2)^2+4a|x-2|+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。

(1) $b=0$ の場合，方程式①の解は $t=$ $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キク}}\,a$ である。このとき，方程式②の実数解の個数は $\boxed{\text{ケ}}$ 個である。

(2) $b<0$ の場合，方程式①の 0 以上である実数解は

$$t=\boxed{\text{ウエ}}\,a+\sqrt{\boxed{\text{オ}}\,a^2-b}$$

である。このとき，方程式②の実数解の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。