

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1] O を原点とする座標平面上に2点A(6, 0), B(3, 3)をとり,
線分 AB を 2 : 1 に内分する点を P, 1 : 2 に外分する点を Q とする。3 点
O, P, Q を通る円を C とする。

(1) P の座標は (,) であり, Q の座標は
(,) である。

(2) 円 C の方程式を次のように求めよう。線分 OP の中点を通り, OP に
垂直な直線の方程式は

$$y = \text{カキ} x + \text{ク}$$

であり, 線分 PQ の中点を通り, PQ に垂直な直線の方程式は

$$y = x - \text{ケ}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

これらの2直線の交点が円Cの中心であることから、円Cの方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{コ}}\right)^2 + \left(y + \boxed{\text{サ}}\right)^2 = \boxed{\text{シス}}$$

であることがわかる。

- (3) 円Cとx軸の二つの交点のうち、点Oと異なる交点をRとすると、Rは線分OAを $\boxed{\text{セ}}$: 1 に外分する。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 連立方程式

$$(*) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2^x + 2^y + 2^z = \frac{35}{2} \\ \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} = \frac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x, y, z を求めよう。ただし, $x \leq y \leq z$ とする。

$X = 2^x, Y = 2^y, Z = 2^z$ とおくと, $x \leq y \leq z$ により $X \leq Y \leq Z$ である。

(*) から, X, Y, Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ = \boxed{\text{ソ}} \\ X + Y + Z = \frac{35}{2} \\ XY + YZ + ZX = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$

が得られる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

この関係式を利用すると、 t の 3 次式 $(t - X)(t - Y)(t - Z)$ は
 $(t - X)(t - Y)(t - Z) = t^3 - (X + Y + Z)t^2 + (XY + YZ + ZX)t - XYZ$

$$= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t - \boxed{\text{ソ}}$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \boxed{\text{テ}}\right)\left(t - \boxed{\text{トナ}}\right)$$

となる。したがって、 $X \leq Y \leq Z$ により

$$X = \frac{1}{2}, \quad Y = \boxed{\text{テ}}, \quad Z = \boxed{\text{トナ}}$$

となり、 $x = \log_{\boxed{\text{二}}} X$, $y = \log_{\boxed{\text{二}}} Y$, $z = \log_{\boxed{\text{二}}} Z$ から

$$x = \boxed{\text{ヌネ}}, \quad y = \boxed{\text{ノ}}, \quad z = \boxed{\text{ハ}}$$

であることがわかる。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

a を正の実数として、 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + a^3$$

とする。

関数 $y = f(x)$ は、 $x = \boxed{\text{アイ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}} a^{\boxed{\text{エ}}}$ をとり、 $x = \boxed{\text{オ}}$

で極小値 $\boxed{\text{カ}} a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。このとき、2点

$$\left(\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}} a^{\boxed{\text{エ}}} \right), \left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}} a^{\boxed{\text{キ}}} \right)$$

と原点を通る放物線

$$y = \boxed{\text{ク}} x^2 - \boxed{\text{ケ}} a^{\boxed{\text{コ}}} x$$

を C とする。原点における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{サシ}} a^{\boxed{\text{ス}}} x$$

である。また、原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y = \frac{1}{\boxed{\text{セ}} a^{\boxed{\text{ソ}}}} x$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y = - \boxed{\text{ク}} x^2 + \boxed{\text{ケ}} a \boxed{\text{コ}} x$$

を D とする。 D と ℓ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{カチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} a \boxed{\text{テ}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は、 0 と $\frac{4a \boxed{\text{ト}} + 1}{2a \boxed{\text{ナ}}}$ である。 C と m で囲

まれた図形の面積を T とする。 $S = T$ となるのは $a \boxed{\text{テ}} = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときであ

り、このとき、 $S = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(x - 2a) + \sin(x - a) + \sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

とする。

(1) 加法定理を用いると

$$f(x) = \left(\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \cos a + \boxed{\text{ウ}} \cos 2a \right) \sin x$$

となる。さらに、2倍角の公式を用いると

$$f(x) = \left(\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}} \cos a + \boxed{\text{キ}} \cos^2 a \right) \sin x \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。

(2) すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つ場合を考える。このとき、 a の値を求めよう。

まず、②により、すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つのは

$$\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}} \cos a + \boxed{\text{キ}} \cos^2 a = 0$$

のときである。よって、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ から

$$\cos a = \frac{\boxed{\text{クケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

であるので、すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つような a がただ一つ定まることがわかる。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

次に、すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ であるから、特に、 $x = \frac{a}{2}$ のとき、

$f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ である。これにより、①から、 $\sin\left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}a\right) = 0$ がわかる。

したがって、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ に注意すると、 $a = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ である。

(3) $a = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ のときの $\cos \frac{a}{2}$ の値を求めよう。まず、 $a = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ の

とき、③が成り立つから

$$\cos 2a = -\frac{\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であることがわかる。したがって、 $\cos \frac{a}{2} = -\cos\left(\pi - \frac{a}{2}\right)$ を利用すると

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

p, q を実数として、 x の3次式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 30$$

とする。

(1) $f(x)$ の x に虚数 $3 + i$ を代入すると

$$f(3 + i) = \boxed{\text{ア}}p + \boxed{\text{イ}}q + 48 + \left(\boxed{\text{ウ}}p + q + \boxed{\text{エオ}} \right)i$$

となる。

(2) 3次方程式 $f(x) = 0$ の一つの解が $3 + i$ であるとき、他の解を求めよう。

$3 + i$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるから

$$\boxed{\text{ア}}p + \boxed{\text{イ}}q + 48 = 0, \quad \boxed{\text{ウ}}p + q + \boxed{\text{エオ}} = 0$$

となり、 p, q の値は

$$p = -\boxed{\text{カ}}, \quad q = -\boxed{\text{キ}}$$

である。このとき、 $f(x)$ を因数分解すると

$$f(x) = \left(x + \boxed{\text{ク}} \right) \left(x^2 - \boxed{\text{ケ}}x + \boxed{\text{コサ}} \right)$$

となり、方程式 $f(x) = 0$ の他の解は

$$\boxed{\text{シス}}, \quad \boxed{\text{セ}} - i$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

- (3) 3次方程式 $f(x)=0$ が実数解 -5 と二つの虚数解 α, β をもつとする。このとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ を p を用いて表し、 $\alpha^2 + \beta^2$ のとり得る値の範囲を求めよう。

-5 が方程式 $f(x)=0$ の解であることから

$$q = 5p - \boxed{\text{ソタ}}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$ は p を用いて

$$f(x) = (x+5) \left\{ x^2 + \left(p - \boxed{\text{チ}} \right) x + \boxed{\text{ツ}} \right\}$$

と表される。このとき、方程式

$$x^2 + \left(p - \boxed{\text{チ}} \right) x + \boxed{\text{ツ}} = 0$$

が虚数解 α, β をもつような p のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} < p < \boxed{\text{テ}} + \boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} \dots \textcircled{1}$$

である。

解と係数の関係により、 $\alpha^2 + \beta^2$ は p を用いて

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - \boxed{\text{二ヌ}} p + \boxed{\text{ネノ}} \dots \textcircled{2}$$

と表される。

したがって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ により、 $\alpha^2 + \beta^2$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ハヒフ}} \leq \alpha^2 + \beta^2 < \boxed{\text{ヘホ}}$$

である。

数学Ⅱ

(下書き用紙)