

数学Ⅱ・数学B

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	} いずれか 2 問を選択し、 解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	
第 6 問	

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 O を原点とする座標平面において、点 $P(p, q)$ を中心とする円 C が、方程式 $y = \frac{4}{3}x$ で表される直線 ℓ に接しているとする。

(1) 円 C の半径 r を求めよう。

点 P を通り直線 ℓ に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x - p) + q$$

なので、 P から ℓ に引いた垂線と ℓ の交点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q), \quad \frac{4}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q) \right)$$

となる。

求める C の半径 r は、 P と ℓ の距離 PQ に等しいので

$$r = \frac{1}{5} \left| \boxed{\text{オ}}p - \boxed{\text{カ}}q \right| \dots\dots\dots \text{①}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

- (2) 円 C が、 x 軸に接し、点 $R(2, 2)$ を通る場合を考える。このとき、 $p > 0$ 、 $q > 0$ である。 C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので、 C の半径 r は q に等しい。したがって、①により、 $p = \boxed{\text{キ}} q$ である。

C は点 R を通るので、求める C の方程式は

$$(x - \boxed{\text{ク}})^2 + (y - \boxed{\text{ケ}})^2 = \boxed{\text{コ}} \dots\dots\dots \text{②}$$

または

$$(x - \boxed{\text{サ}})^2 + (y - \boxed{\text{シ}})^2 = \boxed{\text{ス}} \dots\dots\dots \text{③}$$

であることがわかる。ただし、 $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

- (3) 方程式②の表す円の中心を S 、方程式③の表す円の中心を T とおくと、直線 ST は原点 O を通り、点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。 $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | | | | |
|---|-----------|---|-----------|---|-----------|
| ① | 1 : 1 に内分 | ② | 1 : 2 に内分 | ③ | 2 : 1 に内分 |
| ④ | 1 : 1 に外分 | ⑤ | 1 : 2 に外分 | ⑥ | 2 : 1 に外分 |

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

〔2〕 自然数 m, n に対して, 不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3 \quad \dots\dots\dots ④$$

を考える。

$m = 2, n = 1$ のとき, $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$ であり, この m, n の値の組は ④ を満たす。

$m = 4, n = 3$ のとき, $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$ であり, この m, n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \log_3 n \leq \boxed{\text{テ}} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき, $\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから, ⑤ により, $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。 $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$ により, $m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし, $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合、⑤は、 $\log_3 n \leq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり、 $n^2 \leq \boxed{\text{ノハ}}$ と

変形できる。よって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ のとき、⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合、④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして、 $m = \boxed{\text{ニ}}$ の場合、④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから、④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

p を実数とし、 $f(x) = x^3 - px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。 $f(x)$ の導関数は、

$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^{\boxed{\text{イ}}} - p$ である。したがって、 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるな

らば、 $\boxed{\text{ア}} a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに、 $x = a$ の前後での

$f'(x)$ の符号の変化を考えることにより、 p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は、

$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。 $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを、次の

①～④のうちから一つ選べ。

- ① $p = 0$ ② $p > 0$ ③ $p \geq 0$ ④ $p < 0$ ⑤ $p \leq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとるとする。また、曲線 $y = f(x)$ を C とし、

C 上の点 $\left(\frac{p}{3}, f\left(\frac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとることから、 $p = \boxed{\text{オ}}$ であり、 $f(x)$ は

$x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり、 $x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

曲線 C の接線で、点 A を通り傾きが 0 でないものを ℓ とする。 ℓ の方程式を求めよう。 ℓ と C の接点の x 座標を b とすると、 ℓ は点 $(b, f(b))$ における C の接線であるから、 ℓ の方程式は b を用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}} b^2 - \boxed{\text{コ}} \right) (x - b) + f(b)$$

と表すことができる。また、 ℓ は点 A を通るから、方程式

$$\boxed{\text{サ}} b^3 - \boxed{\text{シ}} b^2 + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解くと、 $b = \boxed{\text{ス}}$ ， $\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが、 ℓ の傾きが

0 でないことから、 ℓ の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点 A を頂点とし、原点を通る放物線を D とする。 ℓ と D で囲まれた図形のうち、不等式 $x \geq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。 D の方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}} x^2 - \boxed{\text{ヌ}} x$$

であるから、定積分を計算することにより、 $S = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

第3問 (選択問題) (配点 20)

数列 $\{a_n\}$ の初項は6であり、 $\{a_n\}$ の階差数列は初項が9、公差が4の等差数列である。

- (1) $a_2 = \boxed{\text{アイ}}$ ， $a_3 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $\boxed{\text{オ}}$ $n + \boxed{\text{カ}}$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{キ}} n^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}} n + \boxed{\text{コ}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

- (2) 数列 $\{b_n\}$ は、初項が $\frac{2}{5}$ で、漸化式

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすとする。 $b_2 = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。数列 $\{b_n\}$ の一般項と初項から第 n 項

までの和 S_n を求めよう。

- ①，②により、すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{タ}}} b_n \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

が成り立つことがわかる。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

ここで

$$c_n = \left(\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{ソ}} \right) b_n \dots\dots\dots ④$$

とすると、③を c_n と c_{n+1} を用いて変形すると、すべての自然数 n に対して

$$\left(\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{チ}} \right) c_{n+1} = \left(\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{ツ}} \right) c_n$$

が成り立つことがわかる。これにより

$$d_n = \left(\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{テ}} \right) c_n \dots\dots\dots ⑤$$

とおくと、すべての自然数 n に対して、 $d_{n+1} = d_n$ が成り立つことがわかる。

$d_1 = \boxed{\text{ト}}$ であるから、すべての自然数 n に対して、 $d_n = \boxed{\text{ト}}$ である。

したがって、④と⑤により、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\left(\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{ソ}} \right) \left(\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{テ}} \right)}$$

である。また

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{ソ}}} - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{セ}} n + \boxed{\text{テ}}}$$

が成り立つことを利用すると、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}} n}{\boxed{\text{ネ}} n + \boxed{\text{ノ}}}$$

であることがわかる。

第4問 (選択問題) (配点 20)

座標空間において、立方体 OABC-DEFG の頂点を

$$O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 3, 0), C(0, 3, 0),$$

$$D(0, 0, 3), E(3, 0, 3), F(3, 3, 3), G(0, 3, 3)$$

とし、OD を 2 : 1 に内分する点を K, OA を 1 : 2 に内分する点を L とする。

BF 上の点 M, FG 上の点 N および K, L の 4 点は同一平面上にあり、四角形 KLMN は平行四辺形であるとする。

- (1) 四角形 KLMN の面積を求めよう。ベクトル $\overrightarrow{LK}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{LK} = (\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$$

となり、四角形 KLMN が平行四辺形であることにより、 $\overrightarrow{LK} = \boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① $\overrightarrow{ML}$

② $\overrightarrow{LM}$

③ $\overrightarrow{NM}$

④ $\overrightarrow{MN}$

ここで、 $M(3, 3, s)$, $N(t, 3, 3)$ と表すと、 $\overrightarrow{LK} = \boxed{\text{オ}}$ であるので、 $s = \boxed{\text{カ}}$, $t = \boxed{\text{キ}}$ となり、N は FG を 1 : $\boxed{\text{ク}}$ に内分することがわかる。

また、 $\overrightarrow{LK}$ と $\overrightarrow{LM}$ について

$$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LM} = \boxed{\text{ケ}}, \quad |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}, \quad |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

となるので、四角形 KLMN の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

- (2) 四角形 KLMN を含む平面を α とし、点 O を通り平面 α と垂直に交わる直線を ℓ 、 α と ℓ の交点を P とする。 $|\overrightarrow{OP}|$ と三角錐 OLMN の体積^{すい}を求めよう。

P(p , q , r) とおくと、 $\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{LK}$ および $\overrightarrow{LM}$ と垂直であるから、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = \boxed{\text{ソ}} \text{ となるので, } p = \boxed{\text{タ}}, q = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} r$$

であることがわかる。 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{PL}$ が垂直であることにより $r = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ と

り、 $|\overrightarrow{OP}|$ を求めると

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\boxed{\text{ヌ}} \sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

である。 $|\overrightarrow{OP}|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐 OLMN の高さであるから、

三角錐 OLMN の体積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

第5問 (選択問題) (配点 20)

次の表は、あるクラスの生徒9人に対して行われた英語と数学のテスト(各20点満点)の得点をまとめたものである。ただし、テストの得点は整数値である。また、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていないものとする。

	英 語	数 学
生徒1	9	15
生徒2	20	20
生徒3	18	14
生徒4	18	17
生徒5	A	8
生徒6	18	C
生徒7	14	D
生徒8	15	14
生徒9	18	15
平均値	16.0	15.0
分 散	B	10.00
相関係数	0.500	

以下、小数の形で解答する場合、指定された^{けた}桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで○にマークすること。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

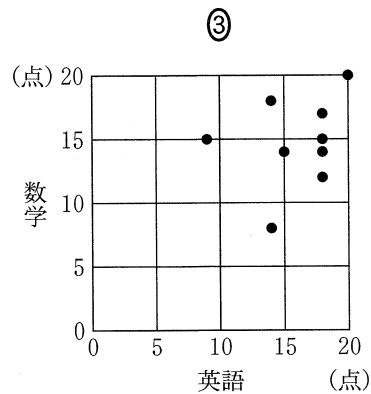
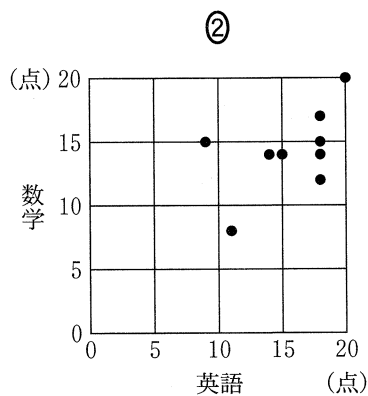
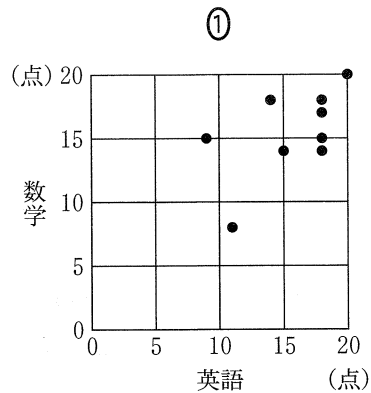
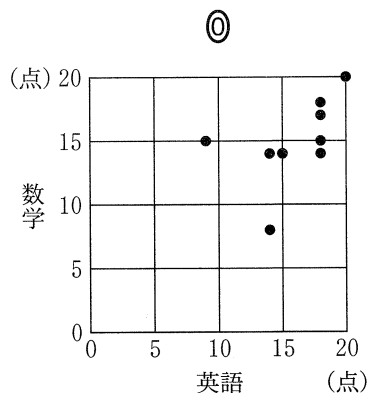
- (1) 生徒5の英語の得点Aは **アイ** 点であり、9人の英語の得点の分散Bの値は **ウエ**・**オカ** である。また、9人の数学の得点の平均値が15.0点であることと、英語と数学の得点の相関係数の値が0.500であることから、生徒6の数学の得点Cと生徒7の数学の得点Dの関係式

$$C + D = \text{キク}$$

$$C - D = \text{ケ}$$

が得られる。したがって、Cは **コサ** 点、Dは **シス** 点である。

- (2) 9人の英語と数学の得点の相関図(散布図)として適切なものは **セ** である。**セ** に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (3) 生徒10が転入したので、その生徒に対して同じテストを行った。次の表は、はじめの9人の生徒に生徒10を加えた10人の得点をまとめたものである。ただし、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていないものとする。

	英 語	数 学
生徒1	9	15
生徒2	20	20
生徒3	18	14
生徒4	18	17
生徒5	A	8
生徒6	18	C
生徒7	14	D
生徒8	15	14
生徒9	18	15
生徒10	6	F
平均値	E	14.0
分 散	18.00	18.00
相関係数	0.750	

10人の英語の得点の平均値Eは ソタ . チ 点であり、生徒10の数学の得点Fは ツ 点である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

- (4) 生徒 10 が転入した後で 1 人の生徒が転出した。残った 9 人の生徒について、英語の得点の平均値は 10 人の平均値と同じ 点、数学の得点の平均値は 10 人の平均値と同じ 14.0 点であった。転出したのは生徒 である。また、英語について、10 人の得点の分散の値を v 、残った 9 人の得点の分散の値を v' とすると

$$\frac{v'}{v} = \text{ト}$$

が成り立つ。さらに、10 人についての英語と数学の得点の相関係数の値を r 、残った 9 人についての英語と数学の得点の相関係数の値を r' とすると

$$\frac{r'}{r} = \text{ナ}$$

が成り立つ。, に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

① -1

② 1

③ $\frac{9}{10}$

④ $\left(\frac{9}{10}\right)^2$

⑤ $\frac{10}{9}$

⑥ $\left(\frac{10}{9}\right)^2$

第6問 (選択問題) (配点 20)

2以上の自然数 N に対して、1 から N までの自然数の積

$$N! = 1 \times 2 \times \cdots \times N$$

の素因数分解を考える。

- (1) $N = 6$ のとき、 $N!$ の素因数分解は $6! = 2^{\boxed{\text{ア}}} \times 3^{\boxed{\text{イ}}} \times 5$ である。 $6!$ は、素因数2を $\boxed{\text{ア}}$ 個、素因数3を $\boxed{\text{イ}}$ 個、素因数5を1個もつ。

- (2) $N!$ がもつ素因数2の個数を求める方法について考えよう。

まず、 $\frac{N}{2}$ の整数部分を M とおく。 N 以下の自然数の中には、 M 個の偶数 $2, 4, \dots, 2M$ がある。その他の奇数の積を Q とおくと、 $N!$ は次のように表すことができる。

$$N! = Q \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2M = Q \times 2^M \times M!$$

したがって、 $N!$ は少なくとも M 個の素因数2をもつことがわかる。さらに、 $M!$ がもつ素因数2の個数を求めるために、 $N!$ に対する手順を $M!$ に対して再び用いることができる。

つまり、 $N!$ がもつ素因数2の個数を求めるためには、 N から $\frac{N}{2}$ の整数部分である M を求め、 M を改めて N と考えて、同じ手順を用いて新しく M を求める、という手順の繰り返しを $M < 2$ となるまで行えばよい。この手順の繰り返しで求められたすべての M の和が、 $N!$ がもつ素因数2の個数である。

たとえば、 $N = 13$ の場合には、 $\frac{13}{2} = 6.5$ であるから、 $M = 6$ となる。この手順を繰り返して M を求めた結果は、 N から M を求める手順を矢印($\rightarrow$)で表すと、次のようにまとめられる。

$$13 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

太字で表された6, 3, 1が、この手順を繰り返して求められた M の値である。それらの和 $6 + 3 + 1 = 10$ が、 $13!$ のもつ素因数2の個数である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

この手順にしたがって、2以上の自然数 N を入力して、 $N!$ がもつ素因数 2 の個数を出力する〔プログラム 1〕を作成した。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム 1〕

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 LET D=2
120 LET C=0
130 LET M=N
140 FOR J=1 TO N
150   LET M=INT(M/D)
160   LET 
170   IF  THEN GOTO 190
180 NEXT J
190 PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
200 END
```

〔プログラム 1〕の に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① $C=C+1$ ② $C=M$ ③ $C=C+M$ ④ $C=C+M+1$

に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① $M \geq D$ ② $M=D$ ③ $M \leq D$ ④ $M < D$ ⑤ $M > D$

〔プログラム 1〕を実行し、変数 N に 101 を入力する。170 行の「GOTO 190」が実行されるときの変数 J の値は である。また、190 行で出力される変数 C の値は である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (3) $N!$ がもつ素因数 2 の個数を求める方法は、他の素因数の個数についても同様に適用できる。たとえば、 $N!$ がもつ素因数 5 の個数を求める場合は、まず、 $\frac{N}{5}$ の整数部分を M とおく。 N 以下の自然数の中には M 個の 5 の倍数があるので、 $N!$ は少なくとも M 個の素因数 5 をもつ。また、これらの M 個の 5 の倍数を 5 で割った商は $1, 2, \dots, M$ である。 $M!$ の中の素因数 5 の個数を求めるためには、 M を N と考えて、同じ手順を繰り返せばよい。

したがって、 $N!$ がもつ素因数 5 の個数を求めるためには、〔プログラム 1〕の クケコ 行を サ に変更すればよい。サ に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| ① INPUT PROMPT "N=":N | ① INPUT PROMPT "C=":C |
| ② INPUT PROMPT "M=":M | ③ LET C=5 |
| ④ LET D=5 | ⑤ LET M=D |

変更した〔プログラム 1〕を実行することにより、 $2014!$ は素因数 5 を シスセ 個もつことがわかる。したがって、 $2014!$ がもつ素因数 2 の個数と素因数 5 の個数について考えることにより、 $2014!$ を 10 で割り切れる限り割り続けると、ソタチ 回割れることがわかる。

- (4) N 以下のすべての素数が、 $N!$ の素因数として含まれる。その個数は、素数 2 や素数 5 の場合と同様に求められる。 N 以下のすべての素因数について、 $N!$ がもつ素因数とその個数を順に出力するように、〔プログラム 1〕を変更して〔プログラム 2〕を作成した。行番号に下線が引かれた行は、変更または追加された行である。

ただし、繰り返し処理「FOR K=A TO B~NEXT K」において、A が B より大きい場合、この繰り返し処理は実行されず次の処理に進む。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

〔プログラム2〕

```

100 INPUT PROMPT "N=":N
110 FOR D=2 TO N
111   FOR K=2 TO D-1
112     IF  THEN 
113   NEXT K
120   LET C=0
130   LET M=N
140   FOR J=1 TO N
150     LET M=INT(M/D)
160     LET 
170     IF  THEN GOTO 190
180   NEXT J
190   PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
191 NEXT D
200 END

```

〔プログラム2〕の111行から113行までの処理は、Dが素数であるかどうかを判定するためのものである。, に当てはまるものを、次の①～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|-------------------------|
| ① $\text{INT}(D/K)=1$ | ② $\text{INT}(D/K)>1$ | ③ $D=\text{INT}(D/K)*K$ |
| ④ $D<>\text{INT}(D/K)*K$ | ⑤ GOTO 120 | ⑥ GOTO 130 |
| ⑦ GOTO 180 | ⑧ GOTO 190 | ⑨ GOTO 191 |

〔プログラム2〕を実行し、変数Nに26を入力したとき、190行は回実行される。回のうち、変数Cの値が2となるのは回である。