

# 数 学 II

(全 問 必 答)

## 第 1 問 (配点 30)

〔1〕  $O$  を原点とする座標平面において、点  $P(p, q)$  を中心とする円  $C$  が、方程式  $y = \frac{4}{3}x$  で表される直線  $\ell$  に接しているとする。

(1) 円  $C$  の半径  $r$  を求めよう。

点  $P$  を通り直線  $\ell$  に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x - p) + q$$

なので、 $P$  から  $\ell$  に引いた垂線と  $\ell$  の交点  $Q$  の座標は

$$\left( \frac{3}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q), \quad \frac{4}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q) \right)$$

となる。

求める  $C$  の半径  $r$  は、 $P$  と  $\ell$  の距離  $PQ$  に等しいので

$$r = \frac{1}{5} \left| \boxed{\text{オ}}p - \boxed{\text{カ}}q \right| \dots\dots\dots \text{①}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

- (2) 円  $C$  が、 $x$  軸に接し、点  $R(2, 2)$  を通る場合を考える。このとき、 $p > 0$ 、 $q > 0$  である。  $C$  の方程式を求めよう。

$C$  は  $x$  軸に接するので、 $C$  の半径  $r$  は  $q$  に等しい。したがって、①により、 $p = \boxed{\text{キ}} q$  である。

$C$  は点  $R$  を通るので、求める  $C$  の方程式は

$$(x - \boxed{\text{ク}})^2 + (y - \boxed{\text{ケ}})^2 = \boxed{\text{コ}} \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

または

$$(x - \boxed{\text{サ}})^2 + (y - \boxed{\text{シ}})^2 = \boxed{\text{ス}} \quad \cdots \cdots \cdots \text{③}$$

であることがわかる。ただし、 $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$  とする。

- (3) 方程式 ② の表す円の中心を  $S$ 、方程式 ③ の表す円の中心を  $T$  とおくと、直線  $ST$  は原点  $O$  を通り、点  $O$  は線分  $ST$  を  $\boxed{\text{セ}}$  する。  $\boxed{\text{セ}}$  に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| ① 1 : 1 に内分 | ② 1 : 2 に内分 | ③ 2 : 1 に内分 |
| ④ 1 : 1 に外分 | ⑤ 1 : 2 に外分 | ⑥ 2 : 1 に外分 |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

〔2〕 自然数  $m, n$  に対して、不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3 \quad \dots\dots\dots ④$$

を考える。

$m = 2, n = 1$  のとき、 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$  であり、この  $m, n$  の値の組は ④ を満たす。

$m = 4, n = 3$  のとき、 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$  であり、この  $m, n$  の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数  $m, n$  の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \log_3 n \leq \boxed{\text{テ}} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

$n$  が自然数のとき、 $\log_3 n$  のとり得る最小の値は  $\boxed{\text{ト}}$  であるから、⑤により、 $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$  でなければならない。 $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$  により、 $m = \boxed{\text{ナ}}$  または  $m = \boxed{\text{ニ}}$  でなければならない。ただし、 $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$  とする。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

$m = \boxed{\text{ナ}}$  の場合、⑤は、 $\log_3 n \leq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$  となり、 $n^2 \leq \boxed{\text{ノハ}}$  と

変形できる。よって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$  のとき、⑤を満たす自然数  $n$  のとり得る値の範囲は  $n \leq \boxed{\text{ヒ}}$  である。したがって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$  の場合、④を満たす自然数  $m, n$  の組の個数は  $\boxed{\text{ヒ}}$  である。

同様にして、 $m = \boxed{\text{ニ}}$  の場合、④を満たす自然数  $m, n$  の組の個数は  $\boxed{\text{フ}}$  である。

以上のことから、④を満たす自然数  $m, n$  の組の個数は  $\boxed{\text{ヘ}}$  である。

## 数学Ⅱ

### 第2問 (配点 30)

$p$  を実数とし、 $f(x) = x^3 - px$  とする。

- (1) 関数  $f(x)$  が極値をもつための  $p$  の条件を求めよう。 $f(x)$  の導関数は、

$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^{\boxed{\text{イ}}} - p$  である。したがって、 $f(x)$  が  $x = a$  で極値をとるな

らば、 $\boxed{\text{ア}} a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$  が成り立つ。さらに、 $x = a$  の前後での

$f'(x)$  の符号の変化を考えることにより、 $p$  が条件  $\boxed{\text{エ}}$  を満たす場合は、

$f(x)$  は必ず極値をもつことがわかる。 $\boxed{\text{エ}}$  に当てはまるものを、次の

①～④のうちから一つ選べ。

- ①  $p = 0$       ②  $p > 0$       ③  $p \geq 0$       ④  $p < 0$       ⑤  $p \leq 0$

- (2) 関数  $f(x)$  が  $x = \frac{p}{3}$  で極値をとるとする。また、曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とし、

$C$  上の点  $\left(\frac{p}{3}, f\left(\frac{p}{3}\right)\right)$  を  $A$  とする。

$f(x)$  が  $x = \frac{p}{3}$  で極値をとることから、 $p = \boxed{\text{オ}}$  であり、 $f(x)$  は

$x = \boxed{\text{カキ}}$  で極大値をとり、 $x = \boxed{\text{ク}}$  で極小値をとる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

曲線  $C$  の接線で、点  $A$  を通り傾きが  $0$  でないものを  $\ell$  とする。 $\ell$  の方程式を求めよう。 $\ell$  と  $C$  の接点の  $x$  座標を  $b$  とすると、 $\ell$  は点  $(b, f(b))$  における  $C$  の接線であるから、 $\ell$  の方程式は  $b$  を用いて

$$y = \left( \boxed{\text{ケ}} b^2 - \boxed{\text{コ}} \right) (x - b) + f(b)$$

と表すことができる。また、 $\ell$  は点  $A$  を通るから、方程式

$$\boxed{\text{サ}} b^3 - \boxed{\text{シ}} b^2 + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解くと、 $b = \boxed{\text{ス}}$ ， $\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$  であるが、 $\ell$  の傾きが

$0$  でないことから、 $\ell$  の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点  $A$  を頂点とし、原点を通る放物線を  $D$  とする。 $\ell$  と  $D$  で囲まれた図形のうち、不等式  $x \geq 0$  の表す領域に含まれる部分の面積  $S$  を求めよう。 $D$  の方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}} x^2 - \boxed{\text{ヌ}} x$$

であるから、定積分を計算することにより、 $S = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$  となる。

## 数学Ⅱ

### 第3問 (配点 20)

関数  $y = \sin x - \cos 2x$  のグラフについて考えよう。ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$  とする。

- (1) まず、 $y = \sin x - \cos 2x > 0$  となる  $x$  の範囲を求めよう。

三角関数の2倍角の公式を利用すれば

$$\begin{aligned} \sin x - \cos 2x &= \boxed{\text{ア}} \sin^2 x + \sin x - \boxed{\text{イ}} \dots\dots\dots \text{①} \\ &= \left( \boxed{\text{ア}} \sin x - \boxed{\text{ウ}} \right) \left( \sin x + \boxed{\text{エ}} \right) \end{aligned}$$

である。よって、 $0 \leq x \leq 2\pi$  において、 $\sin x - \cos 2x = 0$  となる  $x$  の値は、

小さい順に、 $\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ ， $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \pi$ ， $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$  であることがわかる。ま

た、 $y = \sin x - \cos 2x > 0$  となる  $x$  の範囲は、 $\boxed{\text{コ}}$  である。 $\boxed{\text{コ}}$  に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- |                                                                                                       |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| ① $0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$                                                              | ① $\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}} < x < \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \pi$ |
| ② $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \pi < x < \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$ | ③ $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi < x < 2\pi$                         |

- (2) 次に、 $y = \sin x - \cos 2x$  の最大値と最小値を求めよう。

① から

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}} \left( \sin x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^2 - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \dots \text{②}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

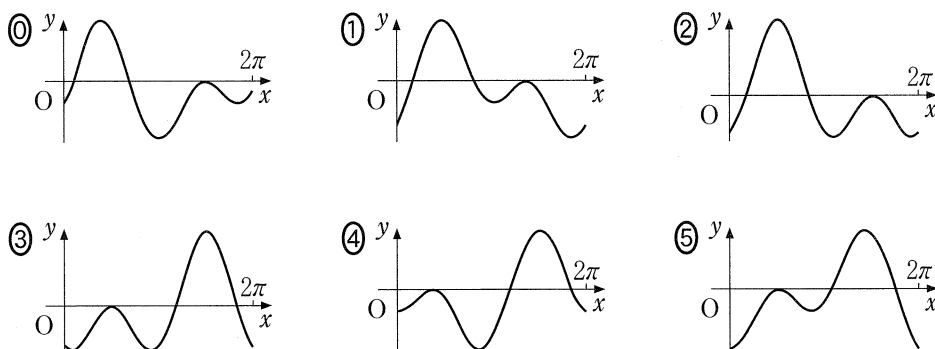
## 数学Ⅱ

よって、②から、 $y = \sin x - \cos 2x$ は、 $x = \boxed{\text{ソ}}$ において最大値  
 $\boxed{\text{タ}}$ をとり、 $x = \boxed{\text{チ}}$ ， $\boxed{\text{ツ}}$ において最小値 $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとること  
 ができる。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}$ ， $\boxed{\text{チ}}$ ， $\boxed{\text{ツ}}$ については、当てはまる  
 ものを、次の①～③のうちから一つずつ選べ。 $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ は解答の順  
 序を問わない。

- ①  $\alpha$       ②  $\frac{\pi}{2} - \alpha$       ③  $\frac{\pi}{2}$       ④  $\frac{\pi}{2} + \alpha$       ⑤  $\pi - \alpha$   
 ⑥  $\pi + \alpha$       ⑦  $\frac{3}{2}\pi - \alpha$       ⑧  $\frac{3}{2}\pi$       ⑨  $\frac{3}{2}\pi + \alpha$       ⑩  $2\pi - \alpha$

ここで、 $\alpha$ は、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ を満たすものとする。

- (3) 以上のことから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフの  
 概形として適切なものは $\boxed{\text{ニ}}$ であることがわかる。 $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまる  
 ものを、次の①～③のうちから一つ選べ。



## 数学Ⅱ

### 第4問 (配点 20)

$c, d$  を実数とし、 $x$  についての3次式  $P(x)$  を

$$P(x) = x^3 + cx^2 + dx + 2$$

で定める。 $P(x)$  は、 $P(-1) = 0$ 、 $P(2) < -2$  を満たし、3以上の自然数  $n$  に対しては  $P(n) \geq 0$  であるとする。

$P(-1) = 0$  により

$$d = c + \boxed{\text{ア}}$$

となり、 $P(x)$  は  $c$  を用いて

$$P(x) = (x+1) \left\{ x^2 + \left( \boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}} \right) x + \boxed{\text{エ}} \right\} \quad \cdots \text{①}$$

と因数分解される。①を用いて、 $P(2) < -2$  を  $c$  について解くと

$$c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \cdots \text{②}$$

となる。

また、 $n$  を3以上の自然数とするとき、不等式  $P(n) \geq 0$  を  $c$  について解くと

$$c \geq -\frac{\boxed{\text{キ}}}{n} + \boxed{\text{ク}} - n \quad \cdots \text{③}$$

となる。 $n \geq 3$  のとき、 $n$  の値が大きくなると、③の右辺の値は小さくなる。したがって、②と③により、 $c$  のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leq c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \cdots \text{④}$$

となる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

3 次関数  $y = P(x)$  のグラフを考えると、 $P(0) = 2 > 0$  かつ  $P(2) < 0$  であるから、方程式  $P(x) = 0$  は 0 と 2 の間に実数解  $\alpha$  をもつ。 $\alpha$  のとり得る値の範囲を求めよう。

① により、この  $\alpha$  は、2 次方程式

$$x^2 + \left( \boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}} \right)x + \boxed{\text{エ}} = 0$$

の解である。この方程式の他の解を  $\beta$  とすると、解と係数の関係により、 $\alpha + \beta$  は  $c$  を用いて

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}$$

と表される。したがって、④ により

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \alpha + \beta \leq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \dots\dots\dots \text{⑤}$$

が得られる。解と係数の関係により、 $\alpha\beta = \boxed{\text{テ}}$  であり、また、 $\alpha > 0$  であるから、⑤ は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \alpha < \alpha^2 + \boxed{\text{テ}} \leq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \alpha$$

と変形できる。この不等式を  $\alpha$  について解いて、 $0 < \alpha < 2$  に注意すると、 $\alpha$  のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leq \alpha < \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

であることがわかる。

## 数学Ⅱ

(下書き用紙)