数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕 O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$Q(2\cos\theta + \cos 7\theta,\ 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$，$PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$OQ^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}(\cos 7\theta \cos\theta + \sin 7\theta \sin\theta)$$
$$= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\cos\left(\boxed{\text{オ}}\,\theta\right)$$

である。

よって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2)　3点O，P，Qが一直線上にあるようなθの値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=0$　　①　$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0$

②　$(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=0$　　③　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3点O，P，Qが一直線上にあるのは $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3)　$\angle$OQPが直角となるのはOQ $=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，$\angle$OQPが直角となるのは $\theta=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 a，b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}\ y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x，y について考えよう。

(1) 連立方程式$(*)$を満たす正の実数 x，y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}}b^{\boxed{\text{セソ}}},\qquad y = a^{p}b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。ただし

$$p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a > 0$ の範囲を動くとき，連立方程式(＊)を満たす正の実数 x，y について，$x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，(＊)を満たす正の実数 x，y は，a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}}a^{\boxed{\text{トナ}}}, \quad y = 2^{\boxed{\text{タ}}}a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される。したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，

$x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

数学Ⅱ

第2問 （配点 30）

(1) 関数$f(x)=\frac{1}{2}x^2$の$x=a$における微分係数$f'(a)$を求めよう。hが0でないとき，xがaから$a+h$まで変化するときの$f(x)$の平均変化率は

$\boxed{\text{ア}}+\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}$である。したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}+\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}\right)=\boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) 放物線$y=\frac{1}{2}x^2$をCとし，C上に点$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$をとる。ただし，$a>0$とする。点Pにおける$C$の接線$\ell$の方程式は

$$y=\boxed{\text{オ}}\,x-\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$$

である。直線ℓとx軸との交点Qの座標は$\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 0\right)$である。点Qを通り$\ell$に垂直な直線を$m$とすると，$m$の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

直線 m と y 軸との交点をAとする。三角形APQの面積を S とおくと

$$S = \frac{a\left(a^2 + \boxed{\text{セ}}\right)}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また，y 軸と線分APおよび曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a\left(a^2 + \boxed{\text{タ}}\right)}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a\left(a^2 - \boxed{\text{テ}}\right)}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。$a > 0$ であるから，$S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また，$a > 0$ のときの $S - T$ の増減を調べると，$S - T$ は $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

第3問 （配点　20）

O を原点とする座標平面において，点 A$(p,\ q)$ と直線 $y = 2x$ を考える。ただし，$q \neq 0$，$q \neq 2p$ とする。x 軸に関して A と対称な点を B，直線 $y = 2x$ に関して A と対称な点を C とし，線分 BC を 1 ： 3 に内分する点を D とする。

(1) 点 B の座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $(p,\ q)$　　① $(p,\ -q)$　　② $(-p,\ q)$　　③ $(-p,\ -q)$

(2) 点 C の座標を $(r,\ s)$ とおくとき，r と s を，p と q を用いて表そう。

直線 AC が直線 $y = 2x$ と垂直であるから，$s - q = \dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}(r - p)$ が成り立つ。また，線分 AC の中点 $\left(\dfrac{p + r}{\boxed{\text{オ}}},\ \dfrac{q + s}{\boxed{\text{オ}}}\right)$ は直線 $y = 2x$ 上にある。これらのことにより

$$r = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}p + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}q, \quad s = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}p + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{サ}}}q$$

であることがわかる。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(3) 点Dは線分BCを1：3に内分するので，(1)と(2)で求めたBとCの座標を用いると，Dの座標は

$$\left(\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}p+\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{セ}}q,\ \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}p-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{チ}}q\right)$$

となる。これにより

$$\mathrm{OD}^2=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\mathrm{OA}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

が成り立つことがわかる。

(4) ①により，AがOを中心とする半径2の円の周上にあるとき，DはOを中心とする半径$\dfrac{\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニヌ}}}{\boxed{ネ}}$の円の周上にあることがわかる。

数学Ⅱ

第4問 （配点 20）

(1) a, b を実数として，$P(x)=x^3+ax^2+bx-5$ とする。虚数 $1+2i$ が方程式 $P(x)=0$ の解であるとき，a, b の値と他の解を求めよう。

$$P(1+2i)=\boxed{\text{アイウ}}-\boxed{\text{エ}}\,a+b+\left(\boxed{\text{オカ}}+\boxed{\text{キ}}\,a+2b\right)i$$

となる。$P(1+2i)=0$ であるから，$a=-\boxed{\text{ク}}$，$b=\boxed{\text{ケ}}$ であり

$$P(x)=x^3-\boxed{\text{ク}}\,x^2+\boxed{\text{ケ}}\,x-5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

このとき，①により，$P\left(\boxed{\text{コ}}\right)=0$ であるから，因数定理により

$$P(x)=\left(x-\boxed{\text{コ}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}\right)$$

が成り立つ。したがって，$P(x)=0$ の $1+2i$ 以外の解は，$\boxed{\text{コ}}$ と $1-\boxed{\text{ス}}\,i$ である。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) p を実数として，$Q(x) = x^3 + px^2 + px + 1$ とする。方程式 $Q(x) = 0$ は，異なる三つの負の実数解 α，β，γ をもつとする。ただし，$\alpha < \beta < \gamma$ とする。α，β，γ が条件

$$(\beta - \alpha) : (\gamma - \beta) = 3 : 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たすとき，三つの解 α，β，γ と p の値を求めよう。

$Q\left(-\boxed{\text{セ}}\right) = 0$ であるから，因数定理により

$$Q(x) = \left(x + \boxed{\text{セ}}\right)\left\{x^2 + \left(p - \boxed{\text{ソ}}\right)x + 1\right\}$$

が成り立つ。

2次方程式

$$x^2 + \left(p - \boxed{\text{ソ}}\right)x + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が異なる二つの負の実数解をもつときの p のとり得る値の範囲は，$p > \boxed{\text{タ}}$ である。

解と係数の関係から，方程式③の解の一つは絶対値が1より大きく，他の解の絶対値は1より小さい。したがって，$\beta = -\boxed{\text{セ}}$ であり，α と γ は方程式③の解であることがわかる。解と係数の関係と条件②により

$\alpha = -\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$，$\gamma = -\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，$p = \dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。